As abelhas são “óptimas matemáticas”

Como é do conhecimento da maioria das pessoas, os alvéolos dos favos das abelhas têm o formato hexagonal. Qual é explicação para tal facto?

Uma vez que os alvéolos são feitos de cera, que elas próprias fabricam, interessa às abelhas que o formato dos mesmos seja o mais económico possível - ou seja, interessa-lhes maximizar o volume dos alvéolos (por forma a terem uma grande capacidade de armazenamento) e minimizar a quantidade de material e de energia utilizados na sua construção. Como resolvem as abelhas este problema?

Se a parede de um alvéolo também for parede do alvéolo do lado, então minimizar-se-á a quantidade do material utilizado. Portanto, o alvéolo não poderá ter uma forma cilíndrica, pois nesse caso não existiriam paredes comuns e consequentemente haveria um desperdício de material (e de espaço). Assim sendo, os alvéolos deverão ter uma forma prismática, com paredes comuns.

Os únicos polígonos regulares (isto é, com os lados todos com o mesmo comprimento e os ângulos internos todos com a mesma amplitude) que podem ser unidos sem deixar espaços entre eles são o triângulo, o quadrado e o hexágono. De facto, para pavimentar o plano usando polígonos regulares e geometricamente iguais sem que haja espaços abertos ou sobreposições, é necessário que a soma dos ângulos internos em torno de cada vértice seja 360 graus. A questão agora é: qual dos três prismas - triangular, quadrangular ou hexagonal - com a mesma área lateral e a mesma altura tem maior volume?

Suponhamos então que as áreas laterais e as alturas dos três prismas são iguais. Como a área lateral é dada pela fórmula perímetro x altura, concluímos que as bases desses prismas são necessariamente polígonos com o mesmo perímetro que designaremos por p. Por outro lado, o volume de um prisma regular é dado por (área da base) x altura. Portanto o problema reduz-se a determinar qual dos polígonos - triângulo, quadrado ou hexágono com igual perímetro - tem a maior área.

Sejam t, q e h as medidas dos comprimentos dos lados do triângulo, do quadrado e do hexágono, respectivamente. Uma vez que o perímetro de um polígono é a soma dos comprimentos dos seus lados, temos $p=3t=4q=6h$. Logo $t=p/3$, $q=p/4$ e $h=p/6$.

Calculando as áreas pretendidas, obtemos:

- área do triângulo = (base x altura) / 2 = p x p x [(raiz quadrada de 3) / 36]

  aproximadamente igual a 0,05 x p x p

- área do quadrado = lado x lado = p x p x [1 / 16]

  aproximadamente igual a 0,06 x p x p

- área do hexágono = (número de lados) x lado x apótema / 2

  = p x p x [(raiz quadrada de 3) / 24]

  aproximadamente igual a 0,07 x p x p.

Verificamos então que o polígono com maior área é o hexágono e consequentemente o prisma hexagonal é aquele que tem maior volume.

Esta crónica não foi escrita ao abrigo do novo Acordo Ortográfico.

Clara Carlota, Departamento de Matemática, Escola de Ciências e Tecnologia, Universidade de Évora

Sílvia Chá, Academia da Força Aérea, Doutorada em Matemática pela Universidade de Évora